## Grado en Matemáticas

## Ejercicios de Análisis Funcional – Relación 1 - Espacios normados. Conceptos básicos (para hacer en clase)

1. Prueba que en todo espacio normado $(X, \| \ \|)$ se verifica la desigualdad:

$$\big|\|x-y\|-\|z-u\|\big| \leqslant \|x-z\|+\|y-u\|$$

Deduce que

$$\big|\|x-z\|-\|z-y\|\big| \leqslant \|x-y\|, \quad \big|\|x\|-\|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\|$$

2. Sea $A$ un subconjunto no vacío de un espacio normado $X$. Para todo $x \in X$ se define

$$\operatorname{dist}(x, A) = \text{ínf}\,\{\|x-a\| : a \in A\}$$

Prueba que:

*a*) $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.

*b*) $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,\overline{A})$ y $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x,A) = 0$.

*c*) $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda| \operatorname{dist}(x,A)$, y $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(y,B)$. En particular, si $A$ es un subespacio vectorial de $X$ la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x,A)$ es una seminorma en $X$.

*d*) Si $A$ es un subespacio vectorial de $X$ y $z - x \in A$ entonces $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(z,A)$

*e*) Si $A$ es un subespacio vectorial cerrado de $X$, definiendo $\|x + A\| = \operatorname{dist}(x,A)$ se obtiene una norma en el espacio vectorial cociente $X/A$.

3. a) Sean $(X, \| \ . \ \|_1)$ e $(Y, \| \ . \ \|_2)$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$. En el espacio vectorial producto $X \times Y$ se define:

$$\|(x,y)\| = \text{máx}\,\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$$

Prueba que $\| \ . \ \|$ es una norma en $X \times Y$ y que la topología de dicha norma es la topología producto en $X \times Y$.

b) Sea $(X, \| \ . \ \|)$ un espacio normado. Prueba que las aplicaciones $(a,b) \to a+b$ y $(\lambda, x) \to \lambda x$, de $X \times X$ y de $\mathbb{K} \times X$ en $X$, son continuas considerando en cada caso las respectivas topologías producto.

4. Sea $X$ un espacio normado y sean $x, y \in X$ tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Prueba que para todos $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ se verifica que $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

5. Sea $X$ un espacio normado. ¿Qué relación hay entre la siguientes tres afirmaciones?:

a) Existen vectores $x, y \in X$ linealmente independientes tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

b) Existen vectores $x, y \in X$ linealmente independientes con $\|x\| = \|y\| = \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1$.

c) Existe un segmento $[u,v] = \{(1-t)u + tv : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ con $u \neq v$ que está contenido en la esfera unidad de $X$.

6. Sea $X$ un espacio normado, $x, y \in X$ y $r > 0, s > 0$ tales que $B(x, r) \subset B(y, s)$. Prueba que $\|y - x\| \leqslant s - r$. Deduce que si $\{B_n\}$ es una sucesión decreciente de bolas en $X$ entonces los radios de dichas bolas son una sucesión decreciente y los centros de dichas bolas son una sucesión de Cauchy.

7. **Criterio de complitud de Cantor**. Prueba que un espacio normado $X$ es completo si, y sólo si, para toda sucesión $\{F_n\}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de $X$ tal que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\{\operatorname{diam}(F_n)\} = 0$, se verifica que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

   Da un ejemplo de una sucesión $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados no vacíos de $\mathbb{R}$ verificando que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y cuya intersección es vacía.

   Sugerencia. En un sentido basta tomar un punto en cada $F_n$. En el otro se toman como $F_n$ los cierres de las colas de la sucesión.

8. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en un espacio normado $X$. Prueba que existe una sucesión parcial $\left\{x_{\sigma(k)}\right\} = \{y_k\}$ que verifica que $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

9. Sea $X$ un espacio vectorial de dimensión infinita y $\{u_i : i \in I\}$ una base algebraica del mismo. Para $x = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ (sólo hay un número finito de sumandos no nulos) se define:

$$\|x\|_1 = \sum_{i \in I} |\lambda_i|, \qquad \|x\|_\infty = \max\{|\lambda_i| : i \in I\}$$

   Prueba que $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_\infty$ son dos normas en $X$ no equivalentes.

10. Sea $X$ un espacio normado y $M$ un subespacio vectorial de $X$ con $M \neq X$. Prueba que $M$ tiene interior vacío y $\overline{M}$ es un espacio vectorial de $X$. Dado un conjunto no vacío $A \subset X$ prueba que $\overline{\operatorname{Lin}(A)}$ es el más pequeño subespacio cerrado de $X$ que contiene a $A$.

11. **Criterio de complitud por series.** Prueba que un espacio normado es completo si, y sólo si, toda serie normalmente convergente es convergente.

12. Sea $C$ un conjunto convexo y simétrico, $C = -C$, en un espacio normado y supongamos que $C$ tiene interior no vacío. Prueba que $C$ es un entorno de cero.